А.В. Ганичева
Тверская государственная сельскохозяйственная академия, г. Тверь

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТИПОЛОГИИ УЧАЩИХСЯ MATHEMATICAL DESCRIPTION OF TYPOLOGY OF PUPILS

Ключевые слова: типология учащихся, подготовленность, относительное время, способность к обучению, выпуклая, вогнутая функция
Keywords: typology of pupils, readiness, relative time, ability to training, convex, concave function

В настоящее время известны различные типологии учащихся (Лисовский, 1990, Акимова, 2007), которые в достаточной степени полно отражают представление о студенте как гармонично развивающемся субъекте с учётом специфики его специализации и будущей профессиональной деятельности. При использовании рейтинговой системы оценивания знаний большое внимание уделяется балльному оцениванию различных компонент и характеристик процесса обучения: текущей успеваемости, заданий контрольных, расчетно-графических, самостоятельных работ, экзаменационных заданий, отдельных фрагментов заданий с учётом сложности и важности соответствующих типов заданий, методик, методов, алгоритмов и способов их решения. Поэтому при балльном оценивании целесообразно использовать а) при чётко структурированной информации средние взвешенные арифметические и векторные характеристики, б) при нечётко структурированной информации - функции принадлежности и соответствующие декартовы произведения (Ганичева, 2013). Различные компоненты и характеристики учебного процесса связаны между собой определенными зависимостями, как для группы обучаемых в целом, так и для отдельных обучаемых. Рассмотрим возможные способы описания наиболее важных из этих зависимостей.

Одной из важнейших характеристик обучаемого является его реализованная способность к обучению, зависящая от подготовленности обучаемого по данному учебному материалу, и времени, отводимому на его изучение. Подготовленность учащегося определяется его компетентностью, выраженной через приобретённые в данный период компетенции, интеллектом, мотивацией, трудолюбием, его самочувствием в данный период, а также педагогическим мастерством и авторитетом преподавателя.

Подготовленность по данному учебному материалу оценивается по решению учащимся предложенных заданий и зависит от их сложности, что выражается в баллах.

Предположим, что за рассматриваемый промежуток времени учащимся было предложено для решения во время практических, самостоятельных и контрольных занятий n разных типов заданий, причём $m_i\,(i=\overline{1,n})$ - число заданий i-го типа. Это могут быть, например, задания по тестированию.

Для каждого i-го типа была вычислена средняя оценка $x_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij}$, где x_{ij} - оценка j-го задания i-го типа. В результате была определена балльная ранжированная последовательность

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n \qquad (1)$$

средних оценок предложенных типов заданий в соответствии со сложностью изучаемого материала: чем сложнее материал, тем выше оценка.

Каждый учащийся имеет свою подготовленность к изучению данного учебного материала $P_i = P(x_i)(i = \overline{1,n})$, зависящую от сложности задания, выраженную через соответствующие баллы x_i. Величину P_i можно определить как отношение $\frac{x'_i}{x_i}$, где x_i' - средний балл, полученный данным обучаемым за выполнение заданий i-го типа (причём $x_i' \le x_i$), и трактовать, например, как подготовленность к выполнению данного задания, и тем самым, уверенность в его выполнении. Функцию P_i назовем способностью к обучению по критерию сложности (предлагаемых заданий).

Однако, баллы обучаемых определяются не только уровнем подготовки к обучению, но и временем, отводимым на выполнение заданий. Согласно нормативам, чем сложнее задание, тем больше отводится времени на его выполнение.

Пусть $t_i = T(x_i) = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} t_{ij}$, где t_{ij} - нормативное время выполнения j-го задания i-го типа $(i = \overline{1,n})$, т.е. t_i нормативное среднее время. Способность к обучению зависит также от времени. Будем обозначать её через $P_i^b = P^b(x_i)$. Данную функцию назовём способностью к обучению по критерию времени и определим как отношение $\frac{t'_i}{t_i}$, где t_i' - среднее время, которое было потрачено обучаемым на решение заданий i-го типа, здесь соотношение между t_i и t_i' может быть различным.

При правильно подобранных заданиях и нормально протекающем (без различного рода «сбоев») учебном процессе изучение данного материала для каждого обучаемого происходит таким образом, что

$$P_1 \ge P_2 \ge \ldots \ge P_i \ge \ldots \ge P_n, \qquad (2)$$

т.к. чем сложнее предлагаемое задание, тем уверенность в его решении не увеличивается. Если для некоторых i и j имеет место $P_i > P_j$, т.е. более сложное задание решается данным обучаемым более уверенно, и он получает больший балл $(x_i > x_j)$,то это говорит о том, что в системе обучения, связанной с данным обучаемым по данной дисциплине, имеются точки бифуркации, подлежащие детальному рассмотрению преподавателем и соответствующей корректировке последовательности (1).

Возможны следующие случаи.

Случай 1. Для любого i $(i=\overline{1,n})$ $x_i' = x_i$, тогда функция $P_i = 1$ для любого $i=\overline{1,n}$ и данный учащийся является «круглым» отличником по предложенному множеству заданий (по критерию сложности).

Случай 2. Для любого i $(i=\overline{1,n})$ $P_i = k_i$ где $k_i = const$ и соответствует уровню: k_1 - «твердого» хорошиста, k_2 - « твердого» троечника, k_3- «безнадежного» двоечника (по критерию сложности). Так, в Тверской государственной сельскохозяйственной академии k_1=0,89 (при округлении до сотых), k_2=0,79, k_3= 0,50.

Нам понадобится следующее определение.

Функция $f(x)$, определённая на данном множестве $M=\{x_1,x_2,\ldots,x_n \mid x_1 < x_2 < \ldots < x_n\}$, называется вогнутой (выпуклой) на M, если точки $(x_i, f(x_i))$ при $2 \le i \le n-1$ на графике будут выше (ниже) отрезка, проведённого через крайние точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_n, f(x_n))$.

Случай 3. Последовательность (2) является строгой, т.е.

$$P_1 > P_2 > \ldots > P_n \ . \qquad (3)$$

В этом случае зависимость $P_i = P(x_i)$ будет иметь вид одной из следующих зависимостей: а) вогнутой (рис.1), б) выпуклой (рис.2), в)линейной (рис.3), г) либо комбинации этих типов, т.е. сначала, например, P_i изменяется как на рис.1, затем как на рис.2, либо сначала, как на рис.1, затем как на рис.2, затем, как на рис.3 и т.п. При этом всюду $0 < P_i \le 1$.

Соединив ординаты соседних точек отрезками, получаем график непрерывной функции, для которой в каждой точке x_i можно ввести понятие левой и правой производной, имеющий смысл левой и правой скорости изменения подготовленности данного обучаемого и измеряемой тангенсом угла наклона касательной.

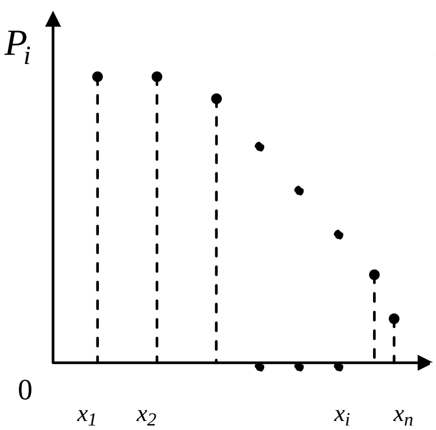

Рис.1

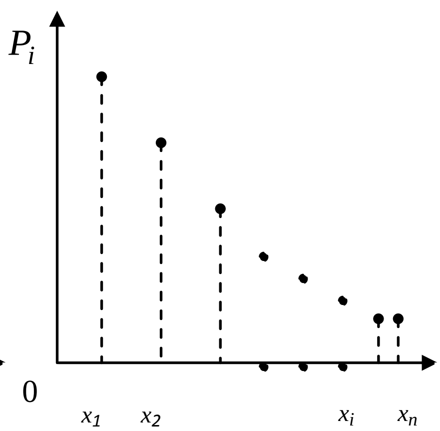

Рис.2

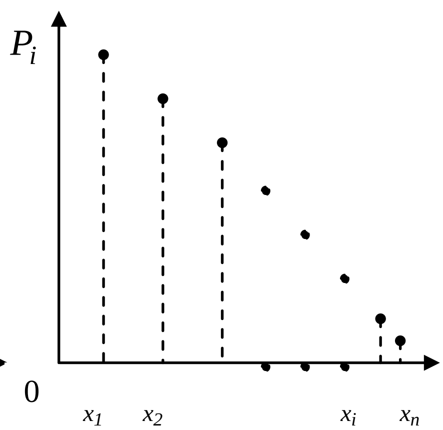

Рис.3

Для вогнутой функции (рис.1) скорость её изменения является отрицательной функцией, а ускорение положительно. Поэтому изменение подготовленности такого обучаемого является ускоренным процессом падения уровня подготовленности. Для выпуклой функции (рис.2) скорость также отрицательна, отрицательным является и ускорение. Здесь имеет место замедленный процесс падения подготовленности. На рис.3 имеем линейную функцию с постоянной отрицательной скоростью изменения и нулевым ускорением, т.е. это равномерное падение подготовленности учащегося. Остальные подслучаи случая 3 представляют собой чередование рассмотренных трёх на рис.1 - 3.

Случай 4 является чередованием случая 1) и 3) либо случая 2) и 3).

С использованием случаев можно проводить классификацию обучаемых соответственно их подготовленности к решению предложенных заданий.

На основании проведённых рассуждений можно сделать вывод о том, что учащийся с вогнутой функцией подготовленности, получив рейтинговую оценку, вряд ли будет пытаться улучшить её на экзамене. В то же время учащийся с выпуклой функцией подготовленности, «окрыленный» тем, что некоторые, даже очень сложные задания, не на столько уж по сложности, в его восприятии, отличаются от более простых, может иметь желание рискнуть улучшить рейтинговую оценку на экзамене. В случае равномерного падения подготовленности от данного учащегося можно ожидать безразличия между его отношением к получению оценки по рейтингу текущей успеваемости и получению оценки на экзамене. В данных примерах наблюдается аналогия несклонного, склонного и безразличного к риску индивидуума в теории полезности.

При ранжировке обучаемых согласно их баллам можно считать, что при $0{,}9 \le P_i \le 1$ учащийся имеет отличный уровень подготовки, при $0{,}8 \le P_i < 0{,}9$ – хороший уровень подготовки, при $0{,}5 < P_i < 0{,}8$ - средний уровень.

Аналогично рассмотренной типологии обучаемых по критерию сложности предлагаемого учебного материала, а тем самым согласно уровню их подготовленности, можно провести типологизацию по критерию времени на основе либо функции $P^b(t_i)$, либо функции $t_i = T(x_i)$, которая заданию с рейтинговым баллом x_i для данного обучаемого ставит в соответствие время t_i, которое он потратил на решение данного задания. Рассуждения будут такими же, как для рассмотренной выше функции $P(x_i)$ для случая 3. Однако функции времени будут либо возрастающими, либо неубывающими, при этом на одном участке функция $P^b(t_i)$ может быть больше единицы или равна единице и т.д. Если для данного учащегося функция $0{,}9 \le P^b(t_i) \le 1{,}1$, то будем считать, что данный учащийся успешно укладывается во временные нормативы; если $0{,}8 \le P^b(t_i) \le 1{,}2$, то он удовлетворительно вписывается во временные нормативы; если $P^b(t_i) > 1{,}2$, то это дает повод оценивать учащегося, как «тугодума» либо как непроизводительно тратящего своё учебное время. При $P^b(t_i) < 0{,}8$ можно квалифицировать данного учащегося как недостаточно усидчивого, либо как очень способного, либо как двоечника, который не решает задание, поскольку не знает данного материала.

Для каждого обучаемого при изучении данного материала, характеризуемого данным множеством заданий с оценочными средними балльными критериями $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, можно определить две функции способности его к обучению данному материалу с использованием либо введенных выше характеристик $P_i (i = \overline{1,n})$ подготовленности данного учащегося для выполнения предложенных заданий, либо временных характеристик $P_i^b (i = \overline{1,n})$.

Обозначим первую функцию способности через $C(x_i, t_i)$ положим её равной $P_i (i = \overline{1,n})$, т.е. эта функция среднему баллу *i*-го типа заданий и среднему времени выполнения ставят в соответствие подготовленность обучаемого к выполнению данных заданий. Вторую функцию обозначим соответственно через $C^b(x_i, t_i)$ и положим равной $P^b{}_i (i = \overline{1,n})$, т.е. эта функция тем же аргументам ставит в соответствие относительный временной показатель выполнения данных заданий. Очевидно, введенные функции можно использовать не только для учебной работы.

Ранжировку учащихся по способности к обучению целесообразно проводить по двойному критерию: «подготовленность - относительное время». Дело в том, что высокий балл, полученный при большой затрате времени, нельзя считать рационально хорошей оценкой, поскольку это происходит в ущерб другим, не менее важным мероприятиям. Можно предположить следующую градацию: $0{,}9 \le C(x_i, t_i) \le 1$ и $0{,}9 \le C^b(x_i, t_i) \le 1{,}1$ – отличные способности к обучению данному учебному материалу, $0{,}8 \le C(x_i, t_i) < 0{,}9$ и $0{,}8 \le C^b(x_i, t_i) \le 1{,}1$ - хорошие способности, $0{,}5 < C(x_i, t_i) < 0{,}8$ и $0{,}7 \le C^b(x_i, t_i) \le 1{,}2$ - средний уровень.

Заметим, что аналогично функциям $P_i = P(x_i)$ и $P_i^b = P^b(t_i)$ можно задать функции $R_i = R(x_i)$ и $R_i^b = R^b(t_i)$, характеризующие способность к научно-исследовательской работе, если определить x_i как средний балл за *i*-ое мероприятие типа участие в научном кружке, викторине, олимпиаде, конференции, публикация статьи, патент и т.п., а t_i - это среднее время, отводимое на данное мероприятие. Так же можно определить функции $S_i = S(x_i)$ и $S_i^b = S^b(t_i)$ - достижения в спорте, $K_i = K(x_i)$ и $K_i^b = K^b(t_i)$- участие в общественной работе, $L_i = L(x_i)$ и $L_i^b = L^b(t_i)$ - увлечение литературой и искусством.

При характеристике типа студента (Акимова, 2007) используются также такие его характеристики, как честность, порядочность, авторитет в коллективе, общительность, культура и т.п. Для оценки этих качеств можно использовать экспертные оценки других студентов, преподавателей, результаты тестирования из практической диагностики (Райгородский, 2008). В случае экспертного оценивания возможно использование нечётких оценок и функций принадлежности для каждого эксперта с последующим определением функции принадлежности пересечения этих множеств.

Рассмотрим применение введённых функций для математического описания типологии студентов, исследованной в (Акимова, 2007).

Тип «гармоничный». Выбрал свою специальность осознанно. Учится очень хорошо, активно участвует в научной и общественной работе. Развит, культурен, общителен, глубоко и серьёзно интересуется литературой и искусством, событиями общественной жизни, занимается спортом. Непримирим к недостаткам, честен, порядочен. Пользуется авторитетом в коллективе как хороший и надёжный товарищ.

Имеется несколько характеристик этого типа: 1-ая – выбрал свою специальность осознанно, 2-ая – развит, 3-я - культурен, 4-ая – общителен, 5-ая – глубоко и серьёзно интересуется общественной жизнью, 6-ая – непримирим к недостаткам, 7-я – честен, 8-ая – порядочен, 9-ая – пользуется авторитетом в коллективе как надёжный и хороший товарищ, 10-ая – учится хорошо, 11-я – активно участвует в научной и общественной работе, 12-я – глубоко и серьёзно интересуется литературой и искусством, 13-я – занимается спортом.

Для математического описания данного типа студента используются функции:

$P(x_i)$, $P^b(t_i)$- для 10-ой характеристики,

$S(x_i)$, $S^b(t_i)$ - для 13-ой характеристики,

$R(x_i)$, $R^b(t_i)$ - для 11-ой характеристики,

$L(x_i)$, $L^b(t_i)$ - для 12-ой характеристики;

Для остальных характеристик используются результаты экспертного оценивания или психодиагностического тестирования.

При этом, например, $0{,}9 \le P_i \le 1$; $0{,}9 \le P^b(t_i) \le 1{,}1$;

$0{,}8 \le S(x_i) \le 1$; $0{,}9 \le S^b(t_i) \le 1{,}1$; $0{,}8 \le R(x_i) \le 1$;

$0{,}9 \le R^b(t_i) \le 1{,}1$; $0{,}9 \le L(x_i) \le 1$; $0{,}9 \le L^b(t_i) \le 1{,}1$.

Отсюда с привлечением функций $C(x_i, t_i)$ и $C^b(x_i, t_i)$ можно сделать вывод об отличных способностях данного типа студентов. Соответствующие характеристики 1-9 для данного типа тоже будут иметь достаточно высокие оценки.

Тип «академик». Выбрал свою специальность осознанно. Учится только на «отлично». Ориентирован на учёбу в аспирантуре. Поэтому много времени отдает научно-исследовательской работе, порой в ущерб другим занятиям.

Характеристики данного типа: 1-ая – выбрал свою специальность осознанно, 2-ая –учится только на «отлично», 3-я ориентирован на учёбу в аспирантуре, 4-ая – порой мало времени остается на другие занятия.

Этот тип математически можно описать, к примеру, так:

$P_i = 1$; $0{,}9 \le P^b(t_i) \le 1{,}1$; $R(x_i) = 1$; $1 \le R^b(x_i) \le 2$; $0 \le S(x_i) \le 0{,}3$; $0 \le S^b(t_i) \le 0{,}3$; $0 \le L(x_i) \le 0{,}3$; $0 \le L^b(t_i) \le 0{,}3$.

С учётом функций $C(x_i, t_i)$ и $C^b(x_i, t_i)$ можно утверждать, что тип «академик»имеет плохую реализацию способности к обучению, т.к. мотивация «всё время – науке» приводит к низкому уровню выполнение других видов работ.

Таким образом, предложенное математическое описание типологии учащихся может быть использовано для повышения качества учебного процесса за счёт индивидуального подхода к обучаемым.

Литература

1. Акимова Ю.Н. Типы личности студентов в современных условиях высшего образования России: диссертация кандидата психологических наук. – Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского. – Ярославль, 2007. – 187 с.
2. Ганичева А.В. Векторный анализ менеджмента качества работы преподавателей. – Материалы конференции «Информационная среда вуза 21 века». – Петрозаводск, 2011. – С. 54 – 55.
3. Лисовский В.Т. Советское студенчество. – М.: Высшая школа, 1990. – 403 с.
4. Райгородский Д.Я. Практическая психодиагностика. – Самара: Издательский Дом «БАХРАХ-М», 2008. – 672 с.

(0,4 п.л.)